

TD₁₄ – Variables aléatoires discrètes

Exercices à préparer

Exercice 1 ★

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi jointe est reportée dans le tableau suivant :

X \ Y	1	2
3	a	2a
4	3a	4a

1. Déterminer la valeur de a
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$
3. Déterminer $\mathbb{E}(XY)$, puis calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ★★

Dans un fast-food, entre 14h et 14h15, le nombre X de clients suit une loi de Poisson de paramètre 10. Il y a 4 caisses pour prendre les commandes. Le gérant (très joueur) expérimente un nouveau système baptisé Happy-Bazar : les clients qui arrivent reçoivent « au hasard » et indépendamment les uns des autres un numéro de caisse vers laquelle ils doivent se diriger. On note X_i le nombre de clients dirigés vers la caisse i pendant ce quart d'heure.

1. Quelle est la loi de X_1 sachant $[X = n]$ ($n \in \mathbb{N}$) ?
2. En déduire la loi de X_1 .
3. Que peut-on dire des lois de X_2, X_3 et X_4 ?
4. Quelle est la loi de $Y = X_1 + X_2$?
5. Déterminer la covariance de X_1 et X_2 .